Επαναληπτικό τεστ Απειροστικός Λογισμός 1

Διάρκεια 2 Ώρες

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1
Να απαντήσετε αν οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι αληθείς ή ψευδείς με πλήρη αιτιολόγηση.

(i) Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία Cauchy τότε και κάθε υπακολουθία της είναι επίσης ακολουθία Cauchy.

(ii) Αν $x_n \to 3$ τότε το σύνολο $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n < 3,0001\}$ είναι πεπερασμένο.

(iii) Αν $x_n \to x < 0$, τότε η (x_n) είναι τελικά αρνητική.

(iv) Αν $A, B \neq \emptyset$ και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\forall\, x \in A,\ \exists\, y \in B:\ x \leq y,$$

τότε $\inf A \leq \inf B$.

(vi) Αν $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει τότε τουλάχιστον μία από τις $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει.

Θέμα 2
Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών με $x_n \to x > 0$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία τείνει προς το άπειρο

(i) Δείξτε ότι υπάρχουν $\delta > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $x_n > \delta$.

(ii) Δείξτε ότι $x_n y_n \to +\infty$.

Θέμα 3
Έστω $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια φθίνουσα ακολουθία ανοιχτών διαστημάτων δηλ. $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$ έτσι ώστε το $b_n - a_n \to 0$. Να αποδείξετε ότι για επιλέγοντας οποιαδήποτε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε για κάθε $a_n \leq x_n \leq b_n, n \in \mathbb{N}$ αυτή είναι συγκλίνουσα.

Θέμα 4
Δίνονται A, B μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε το σύνολο

$$A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}.$$

(i) Να αποδείξετε ένα από τα ακόλουθα:

$$\sup(A - B) = \sup A - \inf B \quad \acute{\eta} \quad \inf(A - B) = \inf A - \sup B.$$

(ii) Αν $A = (1, 3)$, τότε ποιό είναι το σύνολο $A - A$;

(iii) Να αποδείξετε ότι αν $x - y \leq 1$, για κάθε $x, y \in A$, τότε $\sup A - \inf A \leq 1$ και αντίστροφα. Αν $\sup A - \inf A = 1$, τότε είναι δυνατόν να υπάρχουν x και y στο A ώστε $x - y = 1$;

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!